ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **حسابان (۱)** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

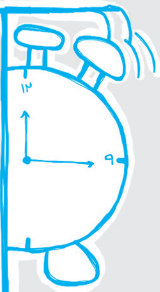
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند☺ در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان حسابان (۱) نیاز دارید، تنها در ۲۳ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ تا ۳ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس حسابان (۱)

فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۰	۴
دوم	۸	۳
سوم	۲ (درس ۱)	۳
چهارم	–	۴
پنجم	–	۶
جمع	۲۰	۲۰

حسابان (۱) | رشته: ریاضی فیزیک | مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه | kheilisabz.com

ردیف | آزمون شمارهٔ ۱ | نوبت اول پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم | نمره

فصل اول

۱ حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید. $A=۲۰۰^۲-۱۹۹^۲+۱۹۸^۲-۱۹۷^۲+\cdots+۲^۲-۱$ ۰/۷۵

۲ طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد از سطح کل مربع رنگ شده است؟ (دی ۹۴) ۱/۲۵

۳ معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که جواب‌های آن مکعب جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ باشد. ۱/۲۵

۴ معادلهٔ $\sqrt{x+۱}=x-۱$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (شهریور ۹۲) ۱/۵

باید اصول رسم نمودار رو برای حل این جور سؤالات، خوب یاد بگیرین مخصوصاً نمودار توابع $y=\sqrt{x}$ ، $y=x^۲$ ، $y=\frac{۱}{x}$ و $y=|x|$ و انتقال اون‌ها رو باید بلد باشین.

۵ معادلهٔ $\frac{x-۴}{x-۲}=\frac{۴}{x(x-۲)}-\frac{۵}{x}$ را حل کنید. (خرداد ۹۴) ۱/۲۵

۶ تابع $y=|x-۱|+|x-۴|$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید معادلهٔ $|x-۱|+|x-۴|=۵$ چند جواب دارد؟ ۱/۵

۷ اگر نقاط $A(-۱,۴)$ و $B(۳,۲)$ دو سر قطر دلخواهی از یک دایره باشند مطلوب است: ۱/۲۵

الف) شعاع و مرکز این دایره

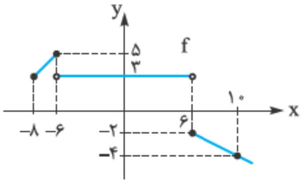
ب) مساحت و محیط این دایره

۸ نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید، به طوری که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطهٔ $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد. ۱/۲۵

فصل دوم

۹ آیا دو تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\neq ۵\\ ۴ & x=۵\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۵x}{x-۵} & x\neq ۵\\ ۴ & x=۵\end{cases}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟ ۱/۲۵

۱۰ دامنه و برد تابع مقابل را نوشته و ضابطهٔ آن را به دست آورید. ۱/۲۵



برای نوشتن ضابطهٔ مربوط به یک نمودار، به نقاط تو پُر و تو خالی توجه کنید. هم‌چنین در هر تکه از نمودار، به محدودهٔ x دقت کنید.

۱۱ تابع‌بودن یا نبودن رابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳} & x\geq ۰\\ |x-۷| & x\leq ۰\end{cases}$ را بررسی کنید. ۱/۵

۱۲ وارون‌پذیری تابع $f(x)=-|x-۱|+۱$ را با شرط $x\geq ۱$ بررسی کرده و در صورت وارون‌پذیر بودن، دامنه و ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید. ۲

۱۳ دو تابع $f(x)=x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۲}$ را در نظر بگیرید: ۲

الف) دامنهٔ تابع gof را بدون تشکیل $(gof)(x)$ به دست آورید.

ب) ضابطهٔ gof را به دست آورید.

پ) مقدار $(\frac{f}{g})(۲)$ را محاسبه کنید.

فصل سوم

۱۴ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰ میلی‌گرم باکتری وجود داشته باشد: ۱/۲۵

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۸ ساعت برآورد کنید.

۱۵ نامعادلهٔ توانی $۴^{۳x+۱}>\frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید. ۰/۷۵

موفق باشید | جمع نمرات ۲۰

<table>
<tr><td>حسابان (۱)</td><td>رشته: ریاضی فیزیک</td><td>مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه</td><td>kheilisabz.com</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>آزمون شمارهٔ ۹
نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>در یک دنبالهٔ حسابی $S_n = ۲n^۲ + ۵n$ است. مجموع ده جملهٔ اول و جملهٔ عمومی این دنباله را بیابید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>اگر $x = -۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲ - mx - ۷ = ۰$ باشد، ریشهٔ دیگر و مقدار m را به دست آورید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>معادلهٔ $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲} = ۲ - \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$ را حل کنید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>سه نقطهٔ $A(۱,۳)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۵,-۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند.
الف) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.
ب) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+۲ & x > ۰ \\ \sqrt{x+۲} & -۲ \le x \le ۰ \end{cases}$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند:
الف) f وارون‌پذیر نباشد.
ب) برای هر عدد حقیقی x نامساوی $x < f(x)$ برقرار باشد.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۷</td><td>اگر $f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$ باشد. تابع $g(x)$ را به‌گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^۲ - ۴x + ۵$.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۸</td><td>اگر $\log_۵ ۳ = a$ مطلوب است حاصل $\log_{\sqrt[۳]{۹}} ۶۲۵$.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۹</td><td>نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای M حدود ۱۰ سال است. اگر نمونه‌ای از M که دارای جرم ۲۰ میلی‌گرم است داشته باشیم آن‌گاه:
الف) جدول روبه‌رو را تکمیل کنید.
<table>
<tr><th>t</th><th>۰</th><th>۱۰</th><th>۲۰</th><th>۳۰</th></tr>
<tr><td>جرم باقی‌مانده</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
ب) جرمی که بعد از ۵۰ سال باقی می‌ماند چه‌قدر است؟</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td>معادلهٔ لگاریتمی $\log(۳-x) - \log(۱+x) = \frac{۱}{\log_۲ \sqrt{۱۰}}$ را حل کنید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۱</td><td>چند دقیقه طول می‌کشد که عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟</td><td>۰/۷۵</td></tr>
<tr><td>۱۲</td><td>سینوس و کسینوس زاویهٔ ۱۰۵ درجه را به دست آورید.</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۳</td><td>اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد و $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$ باشد. حاصل عبارات $\sin ۲\alpha$، $\cos ۲\alpha$ و $\tan ۲\alpha$ و $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید.</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۱۴</td><td>با رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$، وجود حد چپ و حد راست را در $x = ۰$ و $x = ۲$ بررسی کنید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۵</td><td>با رسم نمودار $y = \sqrt{x-۲} + ۱$ مقدار حد را در اطراف نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنید.</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۱۶</td><td>حاصل حدهای زیر را به دست آورید.
الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x-۱}{x-\sqrt{۲-x}}$
ب) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۵x . \sin ۳x}$
پ) $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{x^۲}{|۱-\cos x|}$</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>۱۷</td><td>نمودار $y = [x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲)$ رسم کرده و بگویید آیا در بازه‌های $[-۱,۰]$ و $[۱,۲)$ پیوسته است؟</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td></td><td>موفق باشید
جمع نمرات</td><td>۲۰</td></tr>
</table>

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- با استفاده از اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$۲۰۰^۲-۱۹۹^۲=\underbrace{(۲۰۰-۱۹۹)}_{۱}(۲۰۰+۱۹۹)=۲۰۰+۱۹۹$$

$$۱۹۸^۲-۱۹۷^۲=\underbrace{(۱۹۸-۱۹۷)}_{۱}(۱۹۸+۱۹۷)=۱۹۸+۱۹۷$$

$$\vdots$$

$$۲^۲-۱^۲=\underbrace{(۲-۱)}_{۱}(۲+۱)=۲+۱$$

در نتیجه داریم:

$$A=۲۰۰+۱۹۹+۱۹۸+۱۹۷+\cdots+۲+۱$$

می‌دانیم مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ از فرمول $\frac{n(n+۱)}{۲}$ محاسبه می‌شود، بنابراین:

$$A=\frac{۲۰۰(۲۰۱)}{۲}=۱۰۰(۲۰۱)=۲۰۱۰۰$$

۲- دنبالهٔ قسمت‌های رنگی‌شده:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots,\frac{۱}{۲^n}$$

یک دنبالهٔ هندسی با $a_۱=\frac{۱}{۲}$ و $q=\frac{۱}{۲}$ حاصل می‌شود. طبق فرمول مجموع جملات دنبالهٔ هندسی خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}(۱-\frac{۱}{۲^n})}{\underbrace{۱-\frac{۱}{۲}}_{\cancel{\frac{۱}{۲}}}}=۱-\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}-۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲^n}\geq-\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq۱۰۰$$

$$\xrightarrow{\min(n)} n=۷$$

یعنی بعد از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است.

۳- فرض می‌کنیم α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ هستند. می‌خواهیم معادلهٔ درجه‌دومی بنویسیم که جواب‌های آن $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ باشد. با توجه به معادلهٔ اولیه داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-(-۳)}{۱}=۳\quad,\quad P=\alpha\beta=\frac{۱}{۱}=۱$$

به کمک اتحادها خواهیم داشت:

$$(\alpha+\beta)^۳=\alpha^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲+\beta^۳$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}}=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=۳^۳-۳(۱)(۳)=۲۷-۹=۱۸$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=۱$$

در نتیجه معادلهٔ جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲-S_{\text{جدید}}x+P_{\text{جدید}}=۰\Rightarrow x^۲-۱۸x+۱=۰$$

۴- حل جبری: اول طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $(\sqrt{x+۱})^۲=(x-۱)^۲$

طرف دوم تساوی اتحاد است.

$$\Rightarrow x+۱=x^۲-۲x+۱\Rightarrow x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰,۳$$

اما $x=۰$ قابل قبول نیست زیرا در تساوی اولیه صدق نمی‌کند.

$$\sqrt{۰+۱}\neq۰-۱\Rightarrow ۱\neq-۱$$

حل هندسی: دو نمودار $y_۱=\sqrt{x+۱}$ و $y_۲=x-۱$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد دو نمودار جواب معادله است.

برای رسم هر کدام، با مقدار دادن به x، (دلخواه)، y را محاسبه می‌کنیم:

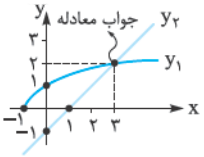
$y_۲=x-۱$:

x	۰	۱	۳
y	−۱	۰	۲

$y_۱=\sqrt{x+۱}$:

x	−۱	۰	۳
y	۰	۱	۲

هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



۵- ابتدا در سمت چپ تساوی مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۵(x-۲)-۴}{x(x-۲)}=\frac{x-۴}{x-۲}\Rightarrow\frac{۵x-۱۴}{x\cancel{(x-۲)}}=\frac{x-۴}{\cancel{x-۲}}$$

$$\Rightarrow ۵x-۱۴=x^۲-۴x\Rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\x=۷\end{cases}$$

اما $x=۲$ قابل قبول نیست زیرا مخرج کسرها را صفر می‌کند.

۶- ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق را حساب کرده و پس از آن جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم.

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

$$x-۴=۰\Rightarrow x=۴$$

x		۱		۴	
x−۱	−	۰	+		+
x−۴	−		−	۰	+

در فاصلهٔ $x<۱$ هر دو عبارت منفی هستند، پس:

$$y=-(x-۱)-(x-۴)=-۲x+۵$$

در فاصلهٔ $۱\leq x<۴$، $x-۱$ مثبت و $x-۴$ منفی است، پس:

$$y=(x-۱)-(x-۴)=x-۱-x+۴=۳\Rightarrow y=۳$$

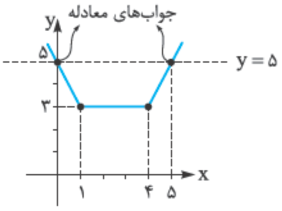
و برای $x\geq۴$ هر دو عبارت مثبت هستند، پس لذا:

$$y=x-۱+x-۴=۲x-۵$$

در نتیجه:

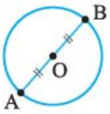
$$y=\begin{cases}-۲x+۵ & x<۱\\ ۳ & ۱\leq x<۴\\ ۲x-۵ & x\geq۴\end{cases}$$

اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



در ادامه برای حل معادلهٔ $|x-۱|+|x-۴|=۵$ باید نمودار روبه‌رو را با خط $y=۵$ قطع دهیم که در آن صورت این خط نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس معادله دو جواب دارد.

۷- الف) اگر نقاط A و B را دو سر قطر دلخواهی از دایره فرض کنیم آن‌گاه نقطهٔ O که در وسط قطر AB است همان مرکز دایره خواهد بود:



$$O_{\text{مرکز}}=\frac{A+B}{۲}=(۱,۳)$$

فاصلهٔ نقطه O تا نقطهٔ A نیز برابر شعاع دایره خواهد بود:

$$OA=\sqrt{(-۱-۱)^{۲}+(۴-۳)^{۲}}=\sqrt{۵}$$

ب)

$$\text{محیط دایره}=۲\pi\times\text{شعاع}=۲\sqrt{۵}\pi$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi\times(\text{شعاع})^{۲}=۵\pi$$

۸- می‌دانیم هر نقطه روی خط $y=۲x$ به صورت $M(\alpha,۲\alpha)$ می‌باشد.

فاصلهٔ نقطهٔ M از $O(۰,۰)$ برابر است با:

$$OM=\sqrt{(\alpha-۰)^{۲}+(۲\alpha-۰)^{۲}}=\sqrt{۵\alpha^{۲}}=\alpha\sqrt{۵}$$

و فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ $A(۲,۴)$ برابر است با:

$$AM=\sqrt{(\alpha-۲)^{۲}+(۲\alpha-۴)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۲)^{۲}+۴(\alpha-۲)^{۲}}$$

$$=\sqrt{۵(\alpha-۲)^{۲}}=(\alpha-۲)\sqrt{۵}$$

اکنون مجموع فاصله‌ها را برابر ۵ قرار می‌دهیم:

$$\alpha\sqrt{۵}+(\alpha-۲)\sqrt{۵}=۵\Rightarrow ۲\alpha\sqrt{۵}-۲\sqrt{۵}=۵$$

$$\Rightarrow ۲\alpha\sqrt{۵}=۵+۲\sqrt{۵}\Rightarrow \alpha=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}+۱$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۲}+۱\Rightarrow M(\frac{\sqrt{۵}}{۲}+۱,\sqrt{۵}+۲)$$

۹- می‌دانیم دو تابع زمانی با هم مساوی‌اند که دامنه‌هایشان با هم برابر بوده و مقدار ضابطهٔ آن‌ها برای هر عضو دامنه یکسان باشد. پس ابتدا دامنه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$D_{f(x)}=\mathbb{R}\qquad,\qquad D_{g(x)}=\mathbb{R}$$

حال مقدار ضابطه‌های این دو تابع را حساب می‌کنیم:

برای $x=۵$: $f(۵)=g(۵)=۴$

برای $x\neq۵$: $f(x)=x$

$$g(x)=\frac{x^{۲}-۵x}{x-۵}=\frac{x\cancel{(x-۵)}}{\cancel{x-۵}}=x\Rightarrow f(x)=g(x)$$

۱۰- دامنه را با استفاده از محور xها و برد را با استفاده از محور yها پیدا می‌کنیم:

$$D_{f(x)}=[-۸,+\infty)\ ,\ R_{f(x)}=(-\infty,-۲]\cup[۳,۵]$$

قطعهٔ سمت چپ: $\begin{cases}A(-۸,۳)\\B(-۶,۵)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۳}{-۶+۸}=۱$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۳=۱(x+۸)\Rightarrow y=x+۱۱$$

قطعهٔ وسط: $-۶<x<۶\ ,\ y=۳$

قطعهٔ سمت راست: $\begin{cases}C(۶,-۲)\\D(۱۰,-۴)\end{cases}\Rightarrow m=\frac{-۴-(-۲)}{۱۰-۶}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲}$

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y+۲=-\frac{۱}{۲}(x-۶)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x+۱۱ & -۸\leq x\leq -۶\\ ۳ & -۶<x<۶\\ -\frac{۱}{۲}x+۱ & x\geq ۶\end{cases}$$

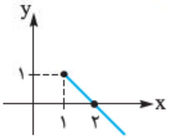
۱۱- برای تابع‌بودن توابع ۲ یا چند ضابطه‌ای دو شرط لازم است: ۱- همهٔ ضابطه‌ها در دامنهٔ خود تابع باشند. ۲- اشتراک دوبه‌دو دامنه‌ها تهی باشد و یا این‌که اگر دامنه‌ها اشتراکی داشتند به ازای xهای مشترک یک مقدار برای ضابطه‌ها به دست آید. برای این سؤال، هریک از ضابطه‌ها تابع هستند. پس شرط اول برقرار است. دامنه‌ها در $x=۰$ اشتراک دارند پس $f(۰)$ را از هر دو ضابطه حساب می‌کنیم. باید به یک جواب منحصر به فرد برسیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(۰)\overset{\text{ضابطهٔ بالا}}{=\!=}\sqrt{۳}\\ f(۰)\overset{\text{ضابطهٔ پایین}}{=\!=}۷\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{۳}\neq۷\Rightarrow \text{f تابع نیست}$$

۱۲- چون $x\geq۱$ است، پس حاصل $(x-۱)$ نامنفی بوده و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$f(x)=-(x-۱)+۱=-x+۱+۱=-x+۲$$

با رسم نمودار، معلوم می‌شود که تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون پذیر است.



$$y=-x+۲\Rightarrow x=۲-y\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-x$$

ضمناً از روی نمودار متوجه می‌شویم که برد آن $(-\infty,۱]$ است، پس دامنهٔ $f^{-۱}$ هم برابر همین بازه است.

۱۳- الف) ابتدا دامنهٔ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x-۱\xrightarrow{\text{f چند جمله‌ای است}}D_{f(x)}=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x+۲}\xrightarrow[\text{منفی شود.}]{\text{زیر رادیکال نباید}}x+۲\geq۰$$

$$\Rightarrow x\geq-۲\Rightarrow D_{g(x)}=[-۲,+\infty)$$

اکنون دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$D_{(gof)(x)}=\{x\in D_{f(x)}\,|\,f(x)\in D_{g(x)}\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-۱\in[-۲,+\infty)\}$$

قسمت انتهایی را حل می‌کنیم و بازه‌هایی که x درآن قرار دارد را به دست می‌آوریم:

$$x-۱\in[-۲,+\infty)\Rightarrow x-۱\geq-۲\Rightarrow x\geq-۱\Rightarrow x\in[-۱,+\infty)$$

$$\Rightarrow D_{(gof)(x)}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in[-۱,+\infty)\}=[-۱,+\infty)$$

ب) برای پیداکردن ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ کافی است در تابع $g(x)$ به جای متغیر x، تابع $f(x)$ را قرار دهیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+۲}=\sqrt{x-۱+۲}=\sqrt{x+۱}$$

پ)

$$(\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۲-۱}{\sqrt{۲+۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

۱۴- الف)

۳	۲	۱	۰	t زمان (ساعت)
$\underbrace{(۱۰\times۲)\times۲\times۲}_{۱۰\times۲^{۳}}$	$\underbrace{(۱۰\times۲)\times۲}_{۱۰\times۲^{۲}}$	۱۰×۲	۱۰	y جرم (میلی‌گرم)

×۲ ×۲ ×۲

$$\Rightarrow y=۱۰\times۲^{t}$$

ب)

$$y=۱۰\times۲^{t}\xrightarrow{t=۸}y=۱۰\times۲^{۸}=۲۵۶۰\ (\text{میلی‌گرم})$$

۱۵- ابتدا دو طرف نامعادله را به صورت تابع نمایی با پایهٔ ۲ می‌نویسیم:

$$۴^{۳x+۱}=(۲^{۲})^{۳x+۱}=۲^{۶x+۲}$$

$$\frac{۱}{۱۰۲۴}=\frac{۱}{۲^{۱۰}}=۲^{-۱۰}$$

اکنون داریم:

$$۲^{۶x+۲}>۲^{-۱۰}\Rightarrow ۶x+۲>-۱۰\Rightarrow x>-۲\Rightarrow x\in(-۲,+\infty)$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- S_n یعنی مجموع n جملهٔ اول دنباله، پس در رابطه داده‌شده به جای n، مقدار ۱۰ را جای‌گذاری می‌کنیم. $S_{۱۰}=۲(۱۰)^۲+۵(۱۰)=۲۵۰$

برای نوشتن جملهٔ عمومی $a_۱$ و d را نیاز داریم:

$$a_۱=S_۱=۲+۵=۷ \quad , \quad d=a_۲-a_۱$$

پس باید $a_۲$ را پیدا کنیم: $a_۲=S_۲-S_۱=۲(۲)^۲+۵(۲)-۷=۱۸-۷=۱۱$

$$\Rightarrow d=۱۱-۷=۴$$

$$\Rightarrow a_n=a_۱+(n-۱)d=۷+(n-۱)(۴)\Rightarrow a_n=۴n+۳$$

۲- $x=-۱$ ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲-mx-۷=۰$ است پس در معادله صدق می‌کند یعنی:

$$۴(-۱)^۲-m(-۱)-۷=۰ \Rightarrow ۴+m-۷=۰ \Rightarrow m=+۳$$

پس این معادله به صورت $۴x^۲-۳x-۷=۰$ است. اکنون ریشهٔ دیگر معادله را می‌یابیم:

$$\Delta=۹-۴(۴)(-۷)=۱۲۱$$

$$x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۲۱}}{۸}=\frac{۳\pm۱۱}{۸}\begin{cases}\nearrow \frac{۱۴}{۸}=\frac{۷}{۴}\\ \searrow -\frac{۸}{۸}=-۱\end{cases}$$

پس ریشهٔ دیگر معادله $x=\frac{۷}{۴}$ است.

۳- ابتدا رادیکال‌ها را به یک طرف تساوی بُرده و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}=۲ \Rightarrow \frac{۵(\sqrt{x}-۲)+۱(\sqrt{x}+۲)}{(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)}=۲$$

$$\Rightarrow \frac{۶\sqrt{x}-۸}{x-۴}=۲ \Rightarrow ۶\sqrt{x}-۸=۲x-۸ \Rightarrow ۳\sqrt{x}=x$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۹x=x^۲ \Rightarrow x^۲-۹x=۰ \Rightarrow x(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\x=۹\end{cases}$$

هر دو ریشهٔ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند پس قابل قبول هستند.

۴- الف) ابتدا طول سه ضلع را محاسبه می‌کنیم.

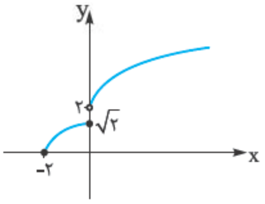
$$AB=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

$$AC=\sqrt{(۱-۵)^۲+(۳+۵)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(۲+۵)^۲}=\sqrt{۳۶+۴۹}=\sqrt{۸۵}$$

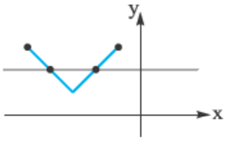
ب) $BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow$ مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

۵- برای پیداکردن دامنه و بُرد بعد از رسم به کمک محور xها و yها به ترتیب دامنه و بُرد را مشخص می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰ \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱\\ \hline y & ۲ & ۳\end{array}\\[2ex] \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰ \quad \begin{array}{c|cc} x & -۲ & ۰\\ \hline y & ۰ & \sqrt{۲}\end{array}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\text{دامنه}=[-۲,+\infty]\\ \text{برد}=[۰,\sqrt{۲}]\cup(۲,+\infty)\end{cases}$$



۶- برای آن‌که f وارون‌پذیر نباشد باید آن را طوری رسم کنیم که خط افقی پیدا شود که نمودارش را در بیش از یک نقطه قطع کند. ضمناً در شکل رسم‌شده، طول نقاط منفی و عرض آن‌ها مثبت است، پس رابطهٔ $x<f(x)$ هم برقرار است. ($f(x)$ همان y است.)

۷- می‌دانیم $f(x)=x^۲+۲x+۲$ پس $f(g(x))=g^۲(x)+۲g(x)+۲$.

از طرفی سؤال گفته $f(g(x))=x^۲-۴x+۵$ پس:

$$g^۲(x)+۲g(x)+۲=x^۲-۴x+۵ \Rightarrow g^۲(x)+۲g(x)+۱=x^۲-۴x+۴$$

$$\Rightarrow (g(x)+۱)^۲=(x-۲)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} g(x)+۱=\pm(x-۲)$$

$$\Rightarrow g(x)=\pm(x-۲)-۱$$

۸- $\log_{\sqrt[۳]{۹}}۶۲۵=\log_{۳^{\frac{۲}{۳}}}۵^۴=\frac{۴}{\frac{۲}{۳}}\log_۳ ۵=\frac{۱۲}{۲}\log_۳ ۵$

$$=۶\times\frac{۱}{\log_۵ ۳}=۶\times\frac{۱}{a}=\frac{۶}{a}$$

۹- الف)

t	۰	۱۰	۲۰	۳۰
جرم باقی‌مانده	۲۰	$\frac{۱}{۲}\times۲۰$	$\frac{۱}{۴}\times۲۰$	$\frac{۱}{۸}\times۲۰$

ب) $f(t)=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}}\times۲۰=(\frac{۱}{۲})^{\frac{۵۰}{۱۰}}\times۲۰=(\frac{۱}{۲})^۵\times۲۰=\frac{۲۰}{۳۲}=\frac{۵}{۸}$ میلی‌گرم

۱۰- $\log(۳-x)-\log(۱+x)=\frac{۱}{\log_۲\sqrt{۱۰}}$ تفریق را به تقسیم تبدیل می‌کنیم:

$$\log\frac{۳-x}{۱+x}=\frac{۱}{\log_۲\sqrt{۱۰}} \qquad (*)$$

می‌دانیم $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}$، پس: $\frac{۱}{\log_۲\sqrt{۱۰}}=\log_{\sqrt{۱۰}}۲$

هم‌چنین: $\log_{\sqrt{۱۰}} ۲ = \log_{۱۰^{\frac{۱}{۲}}} ۲ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \log_{۱۰} ۲ = \boxed{۲} \log_{۱۰} ۲ = \log_{۱۰} ۴$

در نتیجه: $\xrightarrow{(*)} \log_{۱۰} \frac{۳-x}{۱+x} = \log_{۱۰} ۴ \Rightarrow \frac{۳-x}{۱+x} = ۴$

$$\Rightarrow ۴x + ۴ = ۳ - x \Rightarrow x = -\frac{۱}{۵}$$

۱۱- عقربهٔ دقیقه‌شمار در یک دور کامل یعنی در ۶۰ دقیقه، ۲π رادیان دوران می‌کند.

با یک تناسب ساده خواهیم داشت: $\frac{۲\pi}{۲/۵\pi} = \frac{۶۰}{x} \Rightarrow x = \frac{۶۰ \times ۲/۵\pi}{۲\pi} = ۷۵$

یعنی ۷۵ دقیقه طول می‌کشد تا ۲/۵π دوران کند.

۱۲- از فرمول‌های بسط مجموع دو زاویه استفاده می‌کنیم:

$$\sin(۱۰۵^\circ) = \sin(۴۵^\circ + ۶۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۶۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۶۰^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۶}}{۴}$$

$$\cos(۱۰۵^\circ) = \cos(۴۵^\circ + ۶۰^\circ) = \cos ۴۵^\circ \cos ۶۰^\circ - \sin ۴۵^\circ \sin ۶۰^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲} - \sqrt{۶}}{۴}$$

۱۳- می‌دانیم $\sin^۲ \alpha + \cos^۲ \alpha = ۱$، پس $\frac{۹}{۲۵} + \cos^۲ \alpha = ۱$ و از آن‌جا:

$$\cos^۲ \alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

اما α در ربع اول است و علامت کسینوس در این ربع مثبت است. پس $\cos \alpha = \frac{۴}{۵}$،

هم‌چنین دربارهٔ β:

$$\sin^۲ \beta + (-\frac{۵}{۱۳})^۲ = ۱ \Rightarrow \sin^۲ \beta = ۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹}$$

اما β در ربع سوم است و علامت سینوس در این ربع منفی است پس $\sin \beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$.

اکنون مقادیر محاسبه‌شده را در فرمول‌های هر عبارت خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\sin ۲\alpha = ۲ \sin \alpha \cos \alpha = ۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵}) = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha = (\frac{۴}{۵})^۲ - (\frac{۳}{۵})^۲ = \frac{۷}{۲۵}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha} = \frac{\frac{۲۴}{۲۵}}{\frac{۷}{۲۵}} = \frac{۲۴}{۷}$$

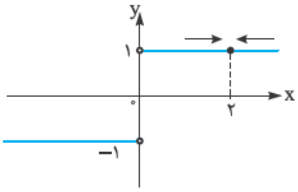
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= (\frac{۳}{۵})(-\frac{۵}{۱۳}) + (\frac{۴}{۵})(-\frac{۱۲}{۱۳}) = -\frac{۶۳}{۶۵}$$

۱۴- اولاً $|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$ پس:

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = ۱ & x \geq ۰ \\ \frac{x}{-x} = -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

در نتیجه $y = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$، حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

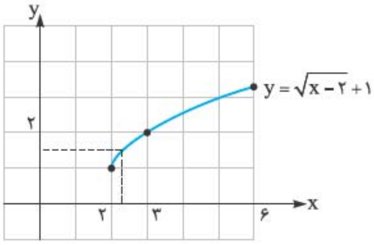


$$(\lim_{x \to ۰^+} f(x) = ۱ \ , \ \lim_{x \to ۰^-} f(x) = -۱) \Rightarrow \lim_{x \to ۰} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱ \Rightarrow \lim_{x \to ۲} f(x) = ۱$$

۱۵- نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	۲	۳	۶
y	۱	۲	۴



$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۱ \ , \ \lim_{x \to ۲^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

پس تابع $f(x)$ در $x = ۲$ حد ندارد.

۱۶- الف) $\lim_{x \to ۱} \frac{x-۱}{x - \sqrt{۲-x}} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to ۱} \underbrace{\frac{x-۱}{x-\sqrt{۲-x}} \times \frac{x+\sqrt{۲-x}}{x+\sqrt{۲-x}}}_{x^۲-۲+x}$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{(\cancel{x-۱})(x + \sqrt{۲-x})}{(x+۲)(\cancel{x-۱})} = \frac{۲}{۳}$$

ب) $\lim_{x \to ۰} \frac{۱ - \cos ۲x}{\sin ۵x . \sin ۳x} = \frac{۰}{۰}$

طبق اتحاد مثلثاتی $۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x$ داریم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{۲\sin^۲ x}{\sin ۵x . \sin ۳x} = \lim_{x \to ۰} \frac{۲x^۲ . \overset{۱ \nwarrow}{\boxed{\frac{\sin^۲ x}{x^۲}}}}{۵x . \underset{\swarrow ۱}{\boxed{\frac{\sin ۵x}{۵x}}} . \underset{\searrow ۱}{\boxed{\frac{\sin ۳x}{۳x}}} . ۳x} = \frac{۲}{۱۵}$$

پ) $\lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲}{|۱ - \cos x|} = \frac{۰}{۰}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲}{۱ - \cos x} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲}{۲\sin^۲ \frac{x}{۲}}$$ (طبق اتحاد مثلثاتی $۱ - \cos x = ۲\sin^۲ \frac{x}{۲}$)

$$= \lim_{x \to ۰^-} \frac{x^۲}{۲(\frac{x}{۲})^۲ \underset{\searrow ۱}{\boxed{\frac{\sin^۲ \frac{x}{۲}}{\frac{x^۲}{۴}}}}} = ۲$$

تذکر: وقتی $x \to ۰^-$ نتیجه می‌گیریم که x در ربع چهارم است. در ربع چهارم مقدار کسینوس بین صفر و یک است لذا حاصل $(۱ - \cos x)$ مثبت می‌شود و خودش از قدر مطلق خارج می‌شود.

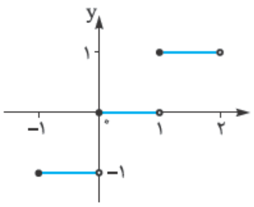
۱۷- بازهٔ $[-۱,۲)$ را یک‌واحد یک‌واحد تقسیم‌بندی می‌کنیم و در هر قسمت مقدار $[x]$ را مشخص می‌کنیم:

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \to y = -۱$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \to y = ۰$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \to y = ۱$$

اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



این تابع در بازهٔ $[-۱,۰]$ پیوسته نیست زیرا

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to ۰} f(x) = -۱ \\ f(۰) = ۰ \end{array}\right\} ۰ \neq -۱$$

اما در بازهٔ $[۱,۲)$ پیوسته است زیرا در $x = ۱$ پیوسته از راست.

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنبالهٔ حسابی و هندسی آشنا شدید. مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S=۱+۲+۳+\cdots+n$$

$$S=n+n-۱+\cdots+۱$$

$$\Rightarrow ۲S=\underbrace{(۱+n)+(۱+n)+\cdots+(n+۱)}_{\text{تا } n} \Rightarrow ۲S=n(n+۱) \Rightarrow S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثال: بر محیط یک دایره ۱۰ نقطهٔ متمایز قرار می‌دهیم و هر نقطه را به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد تمام پاره‌خط‌های حاصل (این پاره‌خط‌ها وتر نامیده می‌شوند) را به دست آورید.

پاسخ: نقطهٔ اول را به ۹ نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم. ۹ وتر به وجود می‌آید. نقطهٔ دوم را به نقاط دیگر (به غیر از نقطهٔ اول) وصل کنید ۸ وتر دیگر به وجود می‌آید. با ادامهٔ همین روند، تعداد تمام وترها برابر است با:

$$۹+۸+۷+\cdots+۲+۱=\frac{۹(۹+۱)}{۲}=۴۵$$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی و هندسی را با نماد S_n (مجموع n جملهٔ اول) نمایش می‌دهند. که از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شوند:

دنبالهٔ حسابی	اگر جملهٔ اول و قدرنسبت را داشته باشیم.	$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$
	اگر جملهٔ اول و جملهٔ آخر را داشته باشیم.	$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$
دنبالهٔ هندسی		$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{(۱-q)}\quad,\quad(q\neq ۱)$

مثال: مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ...,۱۵,۱۷ برابر صفر است؟

پاسخ: جملهٔ اول دنبالهٔ ۱۷ و قدرنسبت $۱۵-۱۷=-۲$ است پس دنباله نزولی است و حتماً جملات منفی نیز در دنباله به وجود می‌آیند که در جمع با جملات مثبت به مجموع صفر برسیم:

$$S_n=۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲(۱۷)+(n-۱)(-۲))=۰$$

$$\Rightarrow ۳۴-۲n+۲=۰ \Rightarrow ۳۶=۲n \Rightarrow n=۱۸$$

یعنی مجموع ۱۸ جملهٔ اول این دنباله برابر صفر خواهد بود.

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ۱۰ جملهٔ اول ۶۵ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

پاسخ: مجموع ۱۰ جملهٔ اول یعنی $S_{۱۰}$ و مجموع ۵ جملهٔ اول یعنی $S_۵$. اکنون طبق فرض:

$$S_{۱۰}=۳۳S_۵ \Rightarrow \frac{S_{۱۰}}{S_۵}=۶۵$$

$$\frac{\frac{\cancel{a_۱}(۱-q^{۱۰})}{\cancel{۱-q}}}{\frac{\cancel{a_۱}(۱-q^۵)}{\cancel{۱-q}}}=\frac{۱-q^{۱۰}}{۱-q^۵}$$

اما طبق اتحاد مزدوج:

$$۱-q^{۱۰}=(۱-q^۵)(۱+q^۵)$$

در نتیجه:

$$\frac{۱-q^{۱۰}}{۱-q^۵}=\frac{\cancel{(۱-q^۵)}(۱+q^۵)}{\cancel{(۱-q^۵)}}=۶۵$$

$$\Rightarrow ۱+q^۵=۶۵ \Rightarrow q^۵=۶۴ \Rightarrow q^۵=۲^۶ \Rightarrow q=۲\sqrt[۵]{۲}$$

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی $a_۵=۴$ و $a_۷=۳۶$ است. مجموع ۴ جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

پاسخ: فرمول جملهٔ عمومی را برای $n=۵$ و $n=۷$ نوشته تا $a_۱$ و q پیدا شوند:

$$\begin{matrix} a_۵=a_۱q^۴=۴ \\ a_۷=a_۱q^۶=۳۶ \end{matrix} \Rightarrow \frac{a_۷}{a_۵}=\frac{a_۱q^۶}{a_۱q^۴}=q^۲=\frac{۳۶}{۴}=۹ \Rightarrow q=\pm ۳$$

با جای‌گذاری q در جملهٔ $a_۵$ داریم: $۴=a_۵=a_۱(\pm ۳)^۴ \Rightarrow ۸۱a_۱=۴ \Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۸۱}$

بنابراین مجموع ۴ جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$S_۴=\frac{a_۱(۱-q^۴)}{۱-q}=\begin{cases} \xrightarrow{q=۳} S_۴=\frac{\frac{۴}{۸۱}(۱-۸۱)}{۱-۳}=\frac{۴}{۸۱}\times ۴۰=\frac{۱۶۰}{۸۱} \\ \xrightarrow{q=-۳} S_۴=\frac{\frac{۴}{۸۱}(۱-۸۱)}{۱+۳}=\frac{۴}{۸۱}\times -۲۰=\frac{-۸۰}{۸۱} \end{cases}$$

معادلات درجه دوم

معادلهٔ درجه دوم: در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادلهٔ درجه دوم آشنا شدید.

یادآوری: هر معادلهٔ درجه دوم به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ $(a\neq ۰)$ است که با فرمول Δ، جواب‌های آن در صورت وجود از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ به دست می‌آیند.

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادلهٔ درجه دوم

در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، خواهیم داشت:

① مجموع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

② حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

③ تفاضل ریشه‌ها: $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

④ مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$

⑤ مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$

⑥ $|\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}|=\sqrt{S\pm ۲\sqrt{P}}$ (α و β مثبت)

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ باشند. بدون به دست آوردن ریشه‌ها حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) $\alpha^۳\beta+\beta^۳\alpha$ **ب)** $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^۳+\beta^۳}$ **پ)** $|\alpha-\beta|$

پاسخ: در معادلهٔ $x^۲-۲x-۴=۰$ داریم: $a=۱, b=-۲, c=-۴$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{+۲}{۱}=۱$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{b}=\frac{-۴}{۱}=-۴$$

الف) در عبارت $\alpha^۳\beta+\beta^۳\alpha$ از $\alpha\beta$ فاکتور می‌گیریم: $\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)$

برای محاسبهٔ $\alpha^۲+\beta^۲$ از روابط بیان شده استفاده می‌کنیم: $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$

بنابراین: $\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)=P(S^۲-۲P)=-۴(۴+۸)=-۴۸$

ب) $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$

بنابراین: $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^۳+\beta^۳}=\frac{S}{S^۳-۳PS}=\frac{۱}{S^۲-۳P}=\frac{۱}{۴+۱۲}=\frac{۱}{۱۶}$

پ) طبق روابط بالا: $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۴-۴(۱)(-۴)=۲۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow |\alpha-\beta|=\frac{۲\sqrt{۵}}{۱}=۲\sqrt{۵}$$

نکته: اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم را داشته باشیم خود معادله برابر است با:

$$\boxed{x^۲-Sx+P=۰}$$

مثلاً اگر ریشه‌های یک معادلهٔ درجه‌دوم $(۱\pm\sqrt{۳})$ باشند، خود معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S=\alpha+\beta=۱+\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳}=۲$$

$$P=\alpha.\beta=(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۳})=۱-۳=-۲$$

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳mx+۴=۰$ باشند، مقدار m را چنان بیابید که داشته باشیم: $\alpha\beta^۲+۴=۰$

پاسخ: معادلهٔ $x^۲-۳mx+۴=۰$ را در نظر می‌گیریم: $a=۱,\ b=-۳m,\ c=۴$

بنابراین: $P=$ ضرب دو ریشه $=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۴$

می‌خواهیم $\alpha\beta^۲+۴=۰$ باشد، پس:

$$۰=\alpha\beta^۲+۴=\underbrace{\alpha\beta}_{۴}\times\beta+۴ \Rightarrow ۴\beta+۴=۰ \Rightarrow \beta=-۱$$

$\beta=-۱$ ریشهٔ معادله است پس باید در معادله صدق کند:

$$(-۱)^۲-۳m(-۱)+۴=۰ \Rightarrow ۱+۳m+۴=۰ \Rightarrow ۳m=-۵ \Rightarrow m=-\frac{۵}{۳}$$

تذکر: اگر به جای P از S استفاده می‌کردیم به رابطهٔ $S=\frac{-b}{a}=۳m$ می‌رسیدیم که دارای مجهول m بود و نمی‌توانستیم مسئله را حل کنیم.

چندجمله‌ای وارونهٔ یک چندجمله‌ای

جابجا می‌کنیم

اگر چندجمله‌ای $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+cx+d$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n

جابجا می‌کنیم

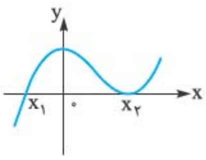
باشد $(a\neq۰)$، به چندجمله‌ای $Q(x)=dx^n+cx^{n-1}+\cdots+bx+a$ وارونهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ می‌گوییم. ریشه‌های معادلهٔ $P(x)=۰$ معکوس ریشه‌های $Q(x)=۰$ هستند.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۵x-۶=۰$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشد.

پاسخ: کافی است چندجمله‌ای وارونهٔ $P(x)=۴x^۲-۵x-۶$ را مساوی صفر قرار دهیم یعنی: $-۶x^۲-۵x+۴=۰$

صفرهای تابع

نقاط برخورد نمودار f با محور xها را «صفرهای تابع f» می‌نامیم. طول این نقاط، در واقع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ می‌باشند.



مثلاً اگر نمودار f به صورت روبه‌رو باشد نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ $f(x)=۰$ یک ریشهٔ ساده $(x_۱)$ و یک ریشهٔ مضاعف $(x_۲)$ دارد دقت کنید که در ریشهٔ مضاعف، نمودار بر محور xها مماس است.

مثال: صفرهای تابع زیر را به دست آورید.

$$g(x)=(x-\frac{۱}{x})^۲-۳(x-\frac{۱}{x})+۲$$

پاسخ: عبارت $(x-\frac{۱}{x})$ دو بار تکرار شده پس آن را t نامیده تا یک معادلهٔ درجهٔ دوم ایجاد شود (به این روش، روش تغییر متغیر می‌گوییم.)

$$x-\frac{۱}{x}=t \Rightarrow t^۲-۳t+۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}t=۱\\t=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-\frac{۱}{x}=۱ \xrightarrow{\times x} x^۲-۱=x \Rightarrow x^۲-x-۱=۰ & \text{معادلهٔ (۱)}\\ x-\frac{۱}{x}=۲ \xrightarrow{\times x} x^۲-۱=۲x \Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰ & \text{معادلهٔ (۲)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} & \text{جواب‌های معادلهٔ (۱)}\\ x=\frac{۲\pm\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۲\pm۲\sqrt{۲}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲} & \text{جواب‌های معادلهٔ (۲)}\end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $(\frac{x^۲}{۳}-۲)^۲-۷(\frac{x^۲}{۳}-۲)+۶=۰$ چند جواب دارد؟

پاسخ: قرار می‌دهیم $\frac{x^۲}{۳}-۲=t$ (روش تغییر متغیر) پس:

$$t^۲-۷t+۶=۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases}t=۱\\t=۶\end{cases}$$

در نتیجه: $\frac{x^۲}{۳}-۲=۱ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm۳$ (دوتا جواب)

$\frac{x^۲}{۳}-۲=۶ \Rightarrow x^۲=۲۴ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲۴}=\pm۲\sqrt{۶}$ (دوتا جواب)

پس این معادله در کل دارای چهارتا جواب است.

مثال: اگر $x=\frac{۱}{۲}$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=۸x^۳+۴x^۲-kx-۸$ باشد ابتدا k را بیابید سپس سایر صفرها را در صورت وجود بیابید.

پاسخ: چون $x=\frac{۱}{۲}$ صفر تابع f است پس $f(\frac{۱}{۲})=۰$.

$$f(\frac{۱}{۲})=۸(\frac{۱}{۸})+۴(\frac{۱}{۴})-k(\frac{۱}{۲})-۸=۰ \Rightarrow ۱+۱-\frac{k}{۲}-۸=۰ \Rightarrow k=-۱۲$$

اکنون از تقسیم $f(x)$ بر $۲x-۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{rrrr|l} ۸x^۳ & +۴x^۲ & +۱۲x & -۸ & ۲x-۱ \\ \hline -۸x^۳ & +۴x^۲ & & & ۴x^۲+۴x+۸ \\ \hline & ۸x^۲ & +۱۲x & -۸ & \\ & -۸x^۲ & +۴x & & \\ \hline & & ۱۶x & -۸ & \\ & & -۱۶x & +۸ & \\ \hline & & & ۰ & \end{array}$$

$$f(x)=(۲x-۱)(۴x^۲+۴x+۸)=۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۸=۰$$

$$\xrightarrow{\div۴} x^۲+x+۲=۰$$

$\Delta=۱-۴(۱)(۲)=-۷<۰\Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

یعنی تابع f صفرِ دیگری ندارد.

بحث در مورد علامت ریشه های معادلهٔ درجه۲ بدون حل آن

اگر معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه باشد (یعنی $\Delta>۰$ باشد) آن‌گاه بدون حل کامل آن می‌توان گفت:

مثال: **بدون حل معادله و با استفاده از S، P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۷x-۱۸=۰$ بحث کنید.**

پاسخ: معادله دو ریشهٔ متمایز دارد. $\Delta=۴۹-۴(۱)(-۱۸)=۱۲۱>۰ \Rightarrow$

ریشه‌ها مختلف‌العلامت هستند. $P=\frac{c}{a}=-۱۸<۰ \Rightarrow$

ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی، بزرگ‌تر است. $S=\frac{-b}{a}=۷>۰ \Rightarrow$

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه‌دوم

می‌دانید که هر تابع درجه دوم به شکل $y=ax^{۲}+bx+c$ با شرط $a\neq۰$ یک سهمی قائم می‌باشد که طول رأس آن $x_S=\frac{-b}{۲a}$ و عرض رأس $y_S=\frac{-\Delta}{۴a}$ می‌باشد. ضمناً اگر $a>۰$ باشد، سهمی به شکل  می‌باشد یعنی دارای min است و اگر $a<۰$ باشد، سهمی به شکل  است یعنی max دارد؛ ضمناً خط به معادلهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است.

مثال: **اگر نمودار تابع $y=(۴-m)x^{۲}+(m^{۲}-۱۶)x+۱$ در نقطه‌ای به طول (۱−) دارای مینیمم باشد، مقدار m را به دست آورید.**

پاسخ: طول مینیمم یا ماکسیمم، هر دو از فرمول $x_S=\frac{-b}{۲a}$ به دست می‌آید، لذا:

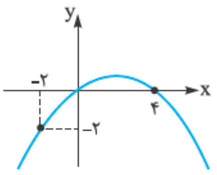
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(m^{۲}-۱۶)}{۲(۴-m)}=-۱ \Rightarrow m^{۲}-۱۶=۸-۲m$$

$$\Rightarrow m^{۲}+۲m-۲۴=۰ \Rightarrow (m+۶)(m-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۶ & \text{(ق‌ق)} \\ m=۴ & \text{(غ‌ق‌ق)} \end{cases}$$

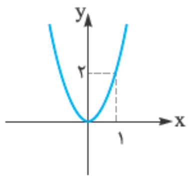
جواب $m=۴$ رد می‌شود چون با جای‌گذاری آن در معادلهٔ سهمی، ضریب $x^{۲}$ صفر می‌شود و سهمی از بین می‌رود.

مثال: **در تابع درجه دوم $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً ضرایب a، b و c، ثانیاً علامت P(x) را تعیین کنید.**

الف)



ب)



پاسخ: الف) طبق نمودار، نقطهٔ (۰,۰) یعنی مبدأ مختصات روی نمودار است پس:

$$۰=a(۰)^{۲}+b(۰)+c \Rightarrow c=۰$$

هم‌چنین نمودار تابع محور xها را در $x=۴$ قطع کرده است پس نقطهٔ (۴,۰) نیز باید در معادله صدق کند. $۰=a(۴)^{۲}+b(۴) \Rightarrow ۱۶a+۴b=۰ \Rightarrow ۴a+b=۰$

از طرفی نقطهٔ (۲−,۲−) نیز روی نمودار تابع قرار دارد، پس:

$$-۲=a(-۲)^{۲}+b(-۲) \Rightarrow ۴a-۲b=-۲ \Rightarrow ۲a-b=-۱$$

اکنون دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴a+b=۰ \\ ۲a-b=-۱ \end{cases} \Rightarrow ۶a=-۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۶} \Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

اکنون a، b و c را در P(x) اولیه جای‌گذاری می‌کنیم: $\Rightarrow P(x)=-\frac{۱}{۶}x^{۲}+\frac{۲}{۳}x+۰$

اکنون جدول تعیین‌علامت را برای معادلهٔ بالا تشکیل می‌دهیم. ریشه‌های این معادله $\begin{cases} x=۴ \\ x=۰ \end{cases}$ هستند (محل برخورد سهمی با محور xها را ریشه می‌نامند):

x		۰		۴	
P	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

$\Rightarrow$

x		۰		۴	
P	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow \begin{cases} (-\infty,۰)\cup(۴,+\infty) : P(x)<۰ \\ [۰,۴] \qquad : P(x)\geq۰ \end{cases}$$

ب) نقطهٔ (۰,۰) رأس این سهمی است پس در معادله باید صدق کند یعنی $۰=a(۰)^{۲}+b(۰)+c$ و از آن‌جا $c=۰$ است. هم‌چنین طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ است. پس $\frac{-b}{۲a}=۰$ و از آن‌جا $b=۰$.

طبق شکل نقطهٔ (۱,۲) روی نمودار است پس:

$$۲=a(۱)^{۲}+b(۱)+c \xrightarrow{c=b=۰} a=۲$$

در نتیجه $P(x)=۲x^{۲}$ می‌باشد که همواره دارای علامت مثبت است.

روش هندسی حل معادلات:

اگر f(x) و g(x) دو تابع باشند با رسم نمودارهای این دو تابع، نقاط برخورد دو تابع، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس هر جواب این معادله، طول نقطهٔ برخوردی از نمودارهای دو تابع است.

این روش حل معادله را روش هندسی حل معادلات می‌نامیم که در آن معمولاً **تعداد جواب‌ها** و **مقدار تقریبی (گاهی دقیق) جواب‌ها** مشخص می‌شود.

مثال: **به روش هندسی معادلهٔ $|x-۱|=x^{۲}-x-۱$ را حل کنید.**

پاسخ: ابتدا با کمک جدول مقادیر نمودارهای دو تابع $y_۲=x^{۲}-x-۱$ و $y_۱=|x-۱|$ را (که به ترتیب نمودار قدرمطلقی و سهمی هستند) رسم می‌کنیم:

$y_۱=|x-۱| \Rightarrow$

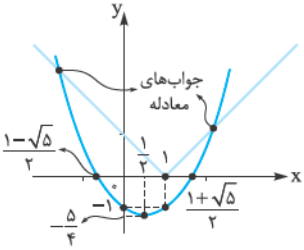
x	۰	۱	۲
$y_۱$	۱	۰	۱

ابتدا رأس سهمی $y_۲=x^{۲}-x-۱$ را مشخص می‌کنیم: $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$

x	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
$y_۲$	−۱	$-\frac{۵}{۴}$	−۱

هم‌چنین سهمی محور xها را قطع می‌کند. طول نقاط برخورد را به روش Δ محاسبه می‌کنیم:



$$x^{۲}-x-۱=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۱-۴(۱)(-۱)=۵$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \begin{cases} \nearrow \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \\ \searrow \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

با توجه به شکل، نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو جواب دارد که با حل به روش جبری مقدار دقیق جواب‌ها پیدا می‌شود.

$$|x-۱|=x^{۲}-x-۱ \begin{cases} \xrightarrow{x>۱} x-۱=x^{۲}-x-۱ \\ \Rightarrow x^{۲}-۲x=۰ \\ \Rightarrow x=۰, \boxed{x=۲} \\ \xrightarrow[x<۱]{} -x+۱=x^{۲}-x-۱ \end{cases}$$